

文章编号: 1000-8055(2010)04-0930-06

线性独立增量过程分析方法

傅惠民, 吴 琼

(北京航空航天大学 小样本技术研究中心, 北京 100191)

摘 要: 提出了线性独立增量随机过程的概念和定义, 建立了线性独立增量过程回归模型及其分析方法, 给出了回归方程和高置信度、高可靠度的置信上、下限曲线. 传统回归分析方法只能对数据点进行分析处理, 线性独立增量过程分析方法则能够对过程进行回归分析, 因此可以对性能退化、裂纹扩展等线性独立增量过程进行整体推断, 具有信息量大、精度高的特点. 大量 Monte Carlo 模拟和工程应用表明, 在试样数相同的情况下, 该方法比传统方法具有更高的精度, 而在精度相同的情况下, 则可减少试样.

关 键 词: 随机过程; 过程回归分析; 可靠性; 性能退化; 裂纹扩展

中图分类号: TB114; O211

文献标识码: A

Analysis method for linear process with independent increments

FU Hui-min, WU Qiong

(Research Center of Small Sample Technology,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: The concept and definition of linear process with independent increments were presented. Then the regression model and analysis method for linear process with independent increments were established. Furthermore, the regression equation and confidence limit curves were given. The proposed method extends the traditional regression analysis which is only suitable to data points to stochastic processes. Therefore the linear processes with independent increments such as performance degradation and crack propagation can be analyzed as an integration by the method. Compared with the traditional method, the presented method not only has higher precision but also solves the problem of reliability assessment with very small sample. The method has been applied in reliability tests successfully, showing that a great number of specimens can be saved.

Key words: stochastic process; process regression analysis; reliability; performance degradation; crack propagation

工程中许多随机过程属于独立增量过程, 如材料的磨损与腐蚀、二极管发光强度的衰减、药品效力的降低和裂纹的扩展等, 但这些过程又不同于布朗运动, 所以不能用维纳过程描述和分析. 鉴于工程实际中这些问题大量存在, 国内外学者都对其进行了研究, 提出了退化数据分析的两步估

计法、伪失效寿命法等^[1-4]. 但是由于同一试样不同时刻的试验数据之间具有显著的相关性, 而这些方法均未充分考虑这种相关性, 严重影响了估计的精度^[1-6].

另一方面, 现有方法都是大样本方法, 无法解决小样本问题^[7-9]. 而工程实际中由于生产成本、

收稿日期: 2009-11-23; 修订日期: 2010-03-14

基金项目: 国家自然科学基金(10472006); 北京市教育委员会共建项目(XK100060418)

作者简介: 傅惠民(1956-), 男, 浙江遂昌人, “长江学者”特聘教授, 博士, 从事小样本信息技术、软校准技术、数据融合方法及可靠性研究.

试验费用以及试验时间等因素的制约,遇到的基本上是试样数较少的情况,尤其在航空航天领域,如何对这类产品进行可靠性评估是亟待解决的问题.对此,本文进行了深入系统的研究,发现并提出了线性独立增量过程的概念,建立了线性独立增量过程的回归模型及其分析方法,给出了其高置信度、高可靠度的置信限曲线,成功地解决了上述难题.

1 线性独立增量过程定义

定义: 设 $\{Z(t), t \geq 0\}$ 为二阶矩过程, 若对于某一给定的严格单调增函数 $x = \phi(t)$, $Y(x) = Z[\phi^{-1}(x)]$ 满足下列条件:

1) 对任意选定的正整数 n 和任意选定的 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, 增量 $Y(x_2) - Y(x_1)$, $Y(x_3) - Y(x_2)$, $\cdots$, $Y(x_n) - Y(x_{n-1})$ 相互独立.

2) 对任意的 $x^* > x$, 增量

$$Y(x^*) - Y(x) \sim N\left[b(x^* - x), 2d_0 d(x^* - x) + d^2[(x^*)^2 - x^2]\right] \quad (1)$$

3) 当 $x = 0$ 时, $Y(0)$ 与增量 $Y(x_2) - Y(x_1)$, $Y(x_3) - Y(x_2)$, $\cdots$, $Y(x_n) - Y(x_{n-1})$ 相互独立, 且有

$$Y(0) \sim N(a, d_0^2) \quad (2)$$

其中 a, b 和 $d_0 \geq 0, d > 0$ 均为常数, 则称 $Z(t)$ 为关于 x 的线性独立增量过程, 或称 $Y(x)$ 为线性独立增量过程.

2 线性独立增量过程回归分析

2.1 线性独立增量过程的回归模型

定理: 设 $Y(x)$ 为一线性独立增量过程, 则它可以表示为

$$y = a + bx + \mathcal{E}(x) \quad (3)$$

$$\mathcal{E}(x) \sim N\left[0, (d_0 + dx)^2\right] \quad (4)$$

式中 $y = y(x) = Y(x)$; a, b 和 $d_0 \geq 0, d > 0$ 均为待定常数.

2.2 $d_0 \neq 0$ 时的过程回归分析

当 $d_0 \neq 0$ 时, 式 (3) 和式 (4) 可以写成以下形式

$$y = a + bx + \mathcal{E}(x) \quad (5)$$

$$\mathcal{E}(x) \sim N\left[0, \sigma_0^2 I^2(x)\right] \quad (6)$$

$$I(x) = 1 + \theta(x - x_0) \quad (7)$$

式中 a, b 和 $\sigma_0 > 0, \theta > 0, x_0$ 均为待定参数.

设 $y_{ij} = y(x_{ij})$, $x_{i1} < x_{i2} < \cdots < x_{in_i}$ 是线性独立增量过程 $y(x)$ 的第 i 个样本函数的一组观测值, $i = 1, 2, \cdots, m$, 则其似然函数为

$$L = \prod_{i=1}^m \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi} I(x_{i1}) \sigma_0} \exp\left[-\frac{(y_{i1} - a - bx_{i1})^2}{2\sigma_0^2 I^2(x_{i1})}\right] \right. \\ \left. \prod_{j=2}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \theta \Delta x_{ij} I(\bar{x}_{ij})} \exp\left[-\frac{(\Delta y_{ij} - b \Delta x_{ij})^2}{4\theta^2 \Delta x_{ij} I(\bar{x}_{ij})}\right] \right\} \quad (8)$$

因此, 根据极大似然原理并考虑估计量的无偏性, 得到 a, b, σ_0^2 和 θ 的估计量分别为

$$\hat{a} = \bar{y}_1 - \hat{b} \bar{x}_1 \quad (9)$$

$$\hat{b} = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} \quad (10)$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{\nu} \left(l_{yy} - \frac{l_{xy}^2}{l_{xx}} \right) \quad (11)$$

$$E(\theta) = 2 \frac{l_{xy}}{l_{xx}} l_{xy} \theta - \frac{l_{xy}^2}{l_{xx}^2} l_{xx} \theta - l_{yy} \theta + \frac{n^* + \nu - p}{\nu} \left(l_{yy} - \frac{l_{xy}^2}{l_{xx}} \right) \quad (12)$$

式中 ν 为自由度, 当 $m \geq 4$ 时, $\nu = n - 3$, 当 $m = 3$ 时, $\nu = n - m + 1$, $n = \sum_{i=1}^m n_i$, 并且

$$x_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \quad (13)$$

$$\bar{x}_{ij} = \frac{x_{ij} + x_{i(j-1)}}{2} \quad (14)$$

$$\Delta x_{ij} = x_{ij} - x_{i(j-1)} \quad (15)$$

$$\Delta y_{ij} = y_{ij} - y_{i(j-1)} \quad (16)$$

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^m x_{i1}}{\sum_{i=1}^m 1} \quad (17)$$

$$\bar{y}_1 = \frac{\sum_{i=1}^m y_{i1}}{\sum_{i=1}^m 1} \quad (18)$$

$$n^* = \sum_{i=1}^m \frac{1}{I(x_{i1})} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=2}^{n_i} \frac{1}{I(\bar{x}_{ij})} \quad (19)$$

$$l_{xx} = \sum_i^m \frac{(x_{i1} - \bar{x}_1)^2}{I^2(x_{i1})} + \frac{1}{2\theta_i} \sum_j^m \sum_{i=1}^{n_i} \frac{\Delta x_{ij}}{I(\dot{x}_{ij})} \quad (20)$$

$$l_{yy} = \sum_i^m \frac{(y_{i1} - \bar{y}_1)^2}{I^2(x_{i1})} + \frac{1}{2\theta_i} \sum_j^m \sum_{i=1}^{n_i} \frac{(\Delta y_{ij})^2}{\Delta x_{ij} I(\dot{x}_{ij})} \quad (21)$$

$$l_{xy} = \sum_i^m \frac{(x_{i1} - \bar{x}_1)(y_{i1} - \bar{y}_1)}{I^2(x_{i1})} + \frac{1}{2\theta_i} \sum_j^m \sum_{i=1}^{n_i} \frac{\Delta y_{ij}}{I(\dot{x}_{ij})} \quad (22)$$

$$l_{xx\theta} = \sum_i^m \frac{(x_{i1} - \bar{x}_1)^2}{I^3(x_{i1})} + \frac{1}{4\theta_i} \sum_j^m \sum_{i=1}^{n_i} \frac{\Delta x_{ij}}{I^2(\dot{x}_{ij})} \quad (23)$$

$$l_{yy\theta} = \sum_i^m \frac{(y_{i1} - \bar{y}_1)^2}{I^3(x_{i1})} + \frac{1}{4\theta_i} \sum_j^m \sum_{i=1}^{n_i} \frac{(\Delta y_{ij})^2}{\Delta x_{ij} I^2(\dot{x}_{ij})} \quad (24)$$

$$l_{xy\theta} = \sum_i^m \frac{(x_{i1} - \bar{x}_1)(y_{i1} - \bar{y}_1)}{I^3(x_{i1})} + \frac{1}{4\theta_i} \sum_j^m \sum_{i=1}^{n_i} \frac{\Delta y_{ij}}{I^2(\dot{x}_{ij})} \quad (25)$$

求解时首先可由式(12)求得 θ ,然后再由式(9)~(11)得到估计值 $\hat{a}$, $\hat{b}$ 和 $\hat{\sigma}_0^2$.式(12)需迭代求解,由于 $E(\theta)$ 具有如下性质,设 $\hat{\theta}$ 为 θ 的预估值,则当 $\hat{\theta} < \theta$ 时, $E(\hat{\theta}) > 0$;当 $\hat{\theta} > \theta$ 时, $E(\hat{\theta}) < 0$,而且 θ 必位于区间 $(0, \theta_{\text{up}})$ 内,其中

$$\theta_{\text{up}} = -\frac{1}{x_{\min} - x_0} \quad (26)$$

式中 $x_{\min}$ 为 x_{i1} ($i = 1, 2, \dots, m$) 中的最小值.所以,可以方便地由二分法求得 θ ,具体步骤如下:

- 1) 令 $\theta_{\text{ow}} = 0$.
- 2) 令 $\theta_0 = \frac{\theta_{\text{ow}} + \theta_{\text{up}}}{2}$,根据 θ_0 ,由式(9)~(11)

计算估计值 $\hat{a}$, $\hat{b}$ 和 $\hat{\sigma}_0^2$.

3) 根据 θ_0 及估计值 $\hat{a}$, $\hat{b}$ 和 $\hat{\sigma}_0^2$,由式(12)计算 $E(\theta_0)$.

4) 如果 $E(\theta_0) = 0$,则取 $\theta = \theta_0$,迭代计算结束.如果 $E(\theta_0) < 0$,则取 $\theta_{\text{up}} = \theta_0$;如果 $E(\theta_0) > 0$,则取 $\theta_{\text{ow}} = \theta_0$,这样无论出现那种情况都可以将区间缩小一半,重复步骤2)~4),即可按所需精度求得 θ .

由此可知,回归方程可由下式给出

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x \quad (27)$$

即

$$\hat{y} = \bar{y}_1 + \hat{b}(x - \bar{x}_1) \quad (28)$$

且

$$\hat{y} = \bar{y}_1 + \hat{b}(x - \bar{x}_1) \sim N \left(a + bx, \left[1 / \sum_i^m I^2(x_{i1}) + \frac{(x - \bar{x}_1)^2}{l_{xx}} \right] \sigma_0^2 \right) \quad (29)$$

而标准差的估计量由下式给出

$$\hat{\sigma}(x) = \hat{\sigma}_0 [1 + \theta(x - x_0)] \quad (30)$$

并且

$$\hat{\sigma}(x) / \sigma(x) \sim \chi^2(\nu) \quad (31)$$

当 m 个样本函数的测量时间完全不相同,其线性相关系数为

$$r = \frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx} l_{yy}}} \quad (32)$$

当 m 个样本函数的测量时间完全相同时,可令 $n_0 = n_i$, $x_j = x_{ij}$, $\dot{x}_j = \dot{x}_{ij}$, $\Delta x_j = \Delta x_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$,线性相关系数为

$$r = \frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx}(l_{yy} - l_{yy}')}} \quad (33)$$

式中

$$l_{yy}' = \frac{\sum_i^m (y_{i1} - \bar{y}_1)^2}{I^2(x_{i1})} + \frac{1}{2\theta_j} \sum_{i=1}^{n_0} \frac{(\Delta y_{ij} - \overline{\Delta y_j})^2}{\Delta x_{ij} I(\dot{x}_{ij})} \quad (34)$$

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{m} \sum_i^m y_{i1} \quad (35)$$

$$\overline{\Delta y_j} = \frac{1}{m} \sum_i^m \Delta y_{ij}, \quad j = 2, 3, \dots, n_0 \quad (36)$$

对于一般情况,线性相关系数仍由式(33)给出,此时

$$l_{yy}' = \sum_i^m \frac{(y_{i1} - \bar{y}_1)^2}{I^2(x_{i1})} + \frac{1}{2\theta_j} \sum_{i=1}^{n_i} \frac{(\Delta y_{ij} - \overline{\Delta y_{ij}})^2}{\Delta x_{ij} I(\dot{x}_{ij})} \quad (37)$$

式中

$$\bar{y}_{i1} = \frac{1}{q_{i1}} \sum_k y_{ki} \delta_{ik}' \quad (38)$$

$$\overline{\Delta y_{ij}} = \frac{1}{q_{ij}} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^{n_k} y_{kl} \delta_{kl} \quad (39)$$

$$\delta'_{ik} = \begin{cases} 0 & x_{kl} \neq x_{il} \\ 1 & x_{kl} = x_{il} \end{cases} \quad (40)$$

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 0 & \Delta x_{kl} \neq \Delta x_{ij} \text{ 或 } \tilde{x}_{kl} \neq \tilde{x}_{ij} \\ 1 & \Delta x_{kl} = \Delta x_{ij} \text{ 且 } \tilde{x}_{kl} = \tilde{x}_{ij} \end{cases} \quad (41)$$

其中 q_{il} 是 x_{kl} ($k = 1, 2, \dots, m$) 中与 x_{il} 相同的个数, q_{ij} 是 Δx_{kl} 和 $\tilde{x}_{kl}$ ($k = 1, 2, \dots, m; l = 2, 3, \dots, n_k$) 中满足 $\Delta x_{kl} = \Delta x_{ij}$ 和 $\tilde{x}_{kl} = \tilde{x}_{ij}$ 的个数 ($i = 1, 2, \dots, m; j = 2, 3, \dots, n_i$).

2.3 $d_0 = 0$ 时的过程回归分析

当 $d_0 = 0$ 时, 式(3)和式(4)可以写成以下形式

$$y = a + bx + \mathcal{E}(x) \quad (42)$$

$$\mathcal{E}(x) \sim N(0, \sigma_0^2 x^2) \quad (43)$$

设 $y_{ij} = y(x_{ij})$, $0 < x_{i1} < x_{i2} < \dots < x_{in_i}$ 是线性独立增量过程 $y(x)$ 的第 i 个样本函数的一组观测值, $i = 1, 2, \dots, m$, 则其似然函数为

$$L = \prod_{i=1}^m \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi} x_{i1} \sigma_0} \exp \left[-\frac{(y_{i1} - a - bx_{i1})^2}{2x_{i1}^2 \sigma_0^2} \right] \cdot \prod_{j=2}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta x_{ij} \tilde{x}_{ij} \sigma_0} \exp \left[-\frac{(\Delta y_{ij} - b\Delta x_{ij})^2}{4\sigma_0^2 \Delta x_{ij} \tilde{x}_{ij}} \right] \right\} \quad (44)$$

根据极大似然原理并考虑估计量的无偏性, 可以得到 a , b 和 σ_0^2 的估计量仍由式(9)~(11)给出, 其中 $\tilde{x}_{ij}$, Δx_{ij} 和 Δy_{ij} 由式(14)~(16)计算. 并且

$$\hat{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^m x_{i1}}{m} \quad (45)$$

$$\hat{y}_1 = \frac{\sum_{i=1}^m y_{i1}}{m} \quad (46)$$

$$l_{xx} = \sum_{i=1}^m \frac{x_{i1} - \hat{x}_1}{x_{i1}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\Delta x_{ij}}{\tilde{x}_{ij}} \quad (47)$$

$$l_{yy} = \sum_{i=1}^m \frac{(y_{i1} - \hat{y}_1)^2}{x_{i1}^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=2}^{n_i} \frac{(\Delta y_{ij})^2}{\Delta x_{ij} \tilde{x}_{ij}} \quad (48)$$

$$l_{xy} = \sum_{i=1}^m \frac{y_{i1} - \hat{y}_1}{x_{i1}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\Delta y_{ij}}{\tilde{x}_{ij}} \quad (49)$$

所以, 回归方程仍由式(27)或式(28)给出, 且

$$\hat{y} = \hat{y}_1 + \hat{b}(x - \hat{x}_1) \sim N \left(a + bx, \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^m x_{i1}^2} + \frac{(x - \hat{x}_1)^2}{l_{xx}} \right] \sigma_0^2 \right) \quad (50)$$

而标准差的估计量由下式给出

$$\hat{\sigma}(x) = \hat{\sigma}_0 x \quad (51)$$

且满足式(31), 此时式(11)和式(31)中 $v = n - 2$.

当 m 个样本函数的测量时间完全不相同, 线性相关系数仍由式(32)给出, 而当 m 个样本函数的测量时间完全相同时, 线性相关系数由式(33)给出, 式(33)中

$$l'_{yy} = \frac{\sum_{i=1}^m (y_{i1} - \hat{y}_1)^2}{x_{i1}^2} + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n_0} \frac{\sum_{i=1}^m (\Delta y_{ij} - \overline{\Delta y_j})^2}{\Delta x_j \tilde{x}_j} \quad (52)$$

其中 $\hat{y}_1$, $\overline{\Delta y_j}$ 由式(35)和式(36)计算.

对于一般情况, 线性相关系数仍由式(33)给出, 此时

$$l'_{yy} = \sum_{i=1}^m \frac{(y_{i1} - \hat{y}_1)^2}{x_{i1}^2} + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n_i} \sum_{i=1}^{n_i} \frac{(\Delta y_{ij} - \overline{\Delta y_{ij}})^2}{\Delta x_j \tilde{x}_j} \quad (53)$$

式中 $\hat{y}_1$ 和 $\overline{\Delta y_{ij}}$ 由式(38)~(41)计算.

3 线性独立增量过程的置信限曲线

根据文献[10-11]和式(29)、式(31)及式(50)可知, 随机过程 $y = y(x)$ 的概率为 P 的百分位值 $y_P(x)$ 的估计量 $\hat{y}_P(x)$ 由下式给出

$$\hat{y}_P(x) = \hat{a} + \hat{b}x + u_P \hat{\sigma}(x) \quad (54)$$

百分位值 $y_P(x)$ 的置信度为 γ ($\gamma > 50\%$) 的单侧置信下限 $y_{Plow}(x)$ 和单侧置信上限 $y_{Pup}(x)$ 分别由下面两式给出

$$y_{Plow}(x) = \hat{a}_0 + \hat{b}_0 x - u_\gamma c_0 \hat{\sigma}_0 \sqrt{c_1 x^2 + c_2 x + c_3} \quad (55)$$

$$y_{Pup}(x) = \hat{a}_0 + \hat{b}_0 x + u_\gamma c_0 \hat{\sigma}_0 \sqrt{c_1 x^2 + c_2 x + c_3} \quad (56)$$

即

$$P\left\{y(x) \leq y_p(x)\right\}=P \quad (57)$$

$$P\left\{y_{\text {low }}(x) \leq y_p(x)\right\}=Y \quad (58)$$

$$P\left\{y_{\text {up }}(x) \geq y_p(x)\right\}=Y \quad (59)$$

式中,当 $d_0 \neq 0$ 时,有

$$\hat{a}_0=\hat{a}+c_0 \hat{\sigma}_0\left(1-\theta_{x_0}\right) u_p \quad (60)$$

$$\hat{b}_0=\hat{b}+c_0 \hat{\sigma}_0 \theta_{u_p} \quad (61)$$

$$c_1=\frac{\theta u_p^2}{w}+\frac{1}{l_{xx}}\left(1-\frac{u_y^2}{w}\right) \quad (62)$$

$$c_2=\frac{2 \theta\left(1-\theta_{x_0}\right) u_p^2}{w}-\frac{2 \bar{x}_1}{l_{xx}}\left(1-\frac{u_y^2}{w}\right) \quad (63)$$

$$c_3=\frac{\left(1-\theta_{x_0}\right)^2 u_p^2}{w}+\left[1 / \sum_i^m I^{-2}\left(x_{i 1}\right)+\frac{\bar{x}_1^2}{l_{xx}}\right]\left(1-\frac{u_y^2}{w}\right) \quad (64)$$

当 $d_0=0$ 时,有

$$\hat{a}_0=\hat{a} \quad (65)$$

$$\hat{b}_0=\hat{b}+c_0 \hat{\sigma}_0 u_p \quad (66)$$

$$c_1=\frac{u_p^2}{w}+\frac{1}{l_{xx}}\left(1-\frac{u_y^2}{w}\right) \quad (67)$$

$$c_2=-\frac{2 \bar{x}_1}{l_{xx}}\left(1-\frac{u_y^2}{w}\right) \quad (68)$$

$$c_3=\left[1 / \sum_i^m x_{i 1}^{-2}+\frac{\bar{x}_1^2}{l_{xx}}\right]\left(1-\frac{u_y^2}{w}\right) \quad (69)$$

其中 u_p 和 u_y 为标准正态偏量,即 $P=\Phi\left(u_p\right)$ 和 $Y=\Phi\left(u_y\right), \Phi(\cdot)$ 为标准正态变量的分布函数.并且

$$c_0=\frac{\sqrt{2 v-1}}{\sqrt{2 v-2}}\left(1-\frac{u_y^2}{w}\right)^{-1} \quad (70)$$

$$w=2\left[v+u_y-c-\frac{1}{\sqrt{v+u_y}-e}\right] \quad (71)$$

式中 c 值可由文献[12]查得,当 $v \geq 5$ 时,对于 $P \leq 50 \%$,可取 $c=0.64$;对于 $P>50 \%$,可取 $c=1.24 u_y$.

4 算 例

表 1 给出了某产品的一组性能测试数据.共对 5 个产品进行试验,每 50 h 记录一次性能数据.由于该产品性能是增长型退化,所以需要控制其

上限,现要求置信度为 90 %、可靠度为 99 % 的单侧置信上限曲线.

表 1 某产品性能测试数据

Table 1 Performance data for some products

测试时间 $t / 10^2 \text{ h}$	试件编号 i				
	1	2	3	4	5
0	6.62	6.25	6.09	6.38	6.38
0.5	7.28	7.00	7.00	7.38	7.41
1.0	8.31	7.81	8.03	8.28	8.44
1.5	9.28	8.41	9.17	8.73	9.48
2.0	9.79	9.28	9.98	10.11	10.47
2.5	10.73	10.01	11.27	10.82	11.50
3.0	11.64	11.09	12.17	12.23	12.85
3.5	12.69	11.84	13.14	13.43	13.92
4.0	13.65	12.94	13.99	13.61	14.80
4.5	13.54	13.46	14.76	14.55	15.74

图 1 给出了该产品的 5 条试验曲线.采用本文方法对表 1 中数据进行处理,可以得到回归方程为($x=t$)

$$\hat{y}=6.3440+1.8060 t$$

其线性相关系数 $r=0.9928$,标准差的估计量为

$$\hat{\sigma}(t)=0.1669+0.1546 t$$

其置信度为 90 %、可靠度为 99 % 的单侧置信上限为

$$\hat{y}_{\text {Pup }}=6.7413+2.1741 t+0.6752 \sqrt{0.0269 t^2+0.0113 t+0.0268}$$

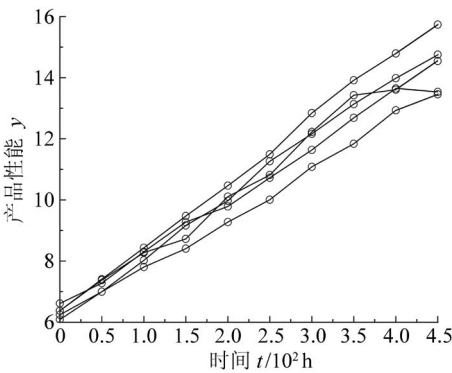


图 1 某产品性能随时间变化的试验曲线
Fig. 1 Test curves for five products

图2给出了该产品性能随时间变化的单侧置信上限曲线。

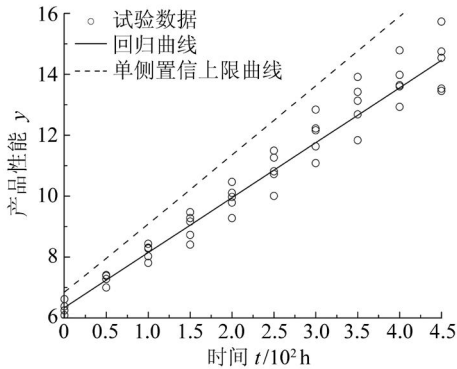


图2 某产品性能随时间变化的单侧置信上限曲线

Fig. 2 One-sided upper confidence limit curve for the product

5 结 论

1) 工程中许多随机过程属于独立增量过程,例如产品性能退化过程、裂纹扩展过程等,但这些过程又不同于布朗运动(维纳过程),研究发现它们有许多共同的规律,因此,提出了线性独立增量过程的概念和定义。

2) 建立了线性独立增量过程的回归模型,发现线性独立增量过程的均值、标准差都呈现线性变化。

3) 工程中大多数独立增量过程,通过选择适当的函数 $x = \phi(t)$ 均可将其变换为线性独立增量过程。

4) 建立了过程回归分析方法。传统回归分析方法只能对数据点进行回归分析,本文方法则能够对过程进行回归分析,因此可以对性能退化、裂纹扩展等线性独立增量过程进行整体推断,具有信息量大、精度高的特点。

5) 建立了线性独立增量过程的回归方程,给出了其高置信度、高可靠度的单侧置信上、下限曲线。

6) 推导出线性相关系数计算公式,采用该相关系数 r 可以对过程回归分析的效果进行检验。

7) 通过 $x = -\phi(t)$ 或 $x = 1/\phi(t)$ 等变换,可将本文方法推广到 $\phi(t)$ 为严格单调减函数的情况。

8) 大量 Monte Carlo 模拟和工程应用表明,在试件数相同的情况下,本文方法可提高预测精度,而在精度相同的情况下,则可减少试样。

参考文献:

- [1] Lu J C, Meeker W Q. Using degradation measures to estimation a time-to-failure distribution [J]. Technometrics, 1993, 35(2): 161-174.
- [2] Tseng S T, Hamada M S, Chiao C H. Using degradation data to improve fluorescent lamp reliability [J]. Journal Quality Technology, 1995, 27(4): 363-369.
- [3] Meeker M Q, Escobar L A. Statistical methods for reliability data [M]. New York: John Wiley & Sons Inc., 1998.
- [4] Zehua C, Shurong Z. Lifetime distribution based degradation analysis [J]. IEEE Transactions on Reliability, 2005, 54(1): 3-10.
- [5] Tomskey J. Regression models for detecting reliability degradation [C]// Proceedings of the Annual Reliability and Maintainability Conference. New York: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1982: 238-244.
- [6] 赵建印. 基于性能退化数据的可靠性建模与应用研究 [D]. 长沙: 国防科技大学, 2005.
ZHAO Jianyin. Study of reliability modeling and application based on performance degradation data [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2005. (in Chinese)
- [7] Nelson W. Analysis of performance degradation data from accelerated tests [J]. IEEE Transactions on Reliability, 1981, 30(2): 149-155.
- [8] Crk V. Reliability assessment from degradation data [C]// Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium. New York: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2000: 155-161.
- [9] 张永强, 刘琦, 周经伦. 基于性能退化数据的可靠性评定方法研究 [J]. 飞行器测控学报, 2005, 24(5): 54-58.
ZHANG Yongqiang, LIU Qi, ZHOU Jinglun. Reliability evaluation based on performance degradation data [J]. Journal of Spacecraft TT&C Technology, 2005, 24(5): 54-58. (in Chinese)
- [10] 傅惠民. 百分回归分析 [J]. 航空学报, 1994, 15(2): 141-148.
FU Huimin. Percent regression analysis [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1994, 15(2): 141-148. (in Chinese)
- [11] 傅惠民. 线性异方差回归分析 [J]. 航空学报, 1994, 15(3): 295-302.
FU Huimin. Linear variance regression analysis [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1994, 15(3): 295-302. (in Chinese)
- [12] 傅惠民. 正态分布百分位值和百分率的置信限和容忍限公式 [J]. 航空学报, 1994, 15(1): 94-101.
FU Huimin. Formulas for tolerance limits and confidence limits of normal population percentiles and percentages [J]. ACTA Aeronautica et Astronautica Sinica, 1994, 15(1): 94-101. (in Chinese)